

# **CM turbulence**

## **Luminita Danaila**

### **Bases de la Turbulence**

#### **1) Description générale de la Turbulence.**

#### **2) Equations fondamentales des écoulements turbulents**

Rappels des équations de transport de quantité de mouvement (Navier-Stokes) et de l'énergie

Le problème de la fermeture de la turbulence, illustré pour le transport de température

#### **3) Modélisation phénoménologique de la turbulence**

Production et dissipation

Mécanismes et échelles de production et de dissipation de la turbulence.

Cascade d'énergie et théorie de Kolmogorov.

Fermetures élémentaires : viscosité turbulente, longueur de mélange.

## **1. Description générale de la turbulence.**

La turbulence est un écoulement peuplé de zones rotationnelles de vitesse ( $\omega$ ), identifiées comme des tourbillons.

Notion d'échelle = taille de tourbillon.

grande échelle → échelle intermédiaire → petite échelle

$r$ =notation d'une échelle

$k$ = nombre d'onde=  $2\pi/r$  (m<sup>-1</sup>).

Caractéristique de base des écoulement turbulents :

Aléatoire, imprédictible :

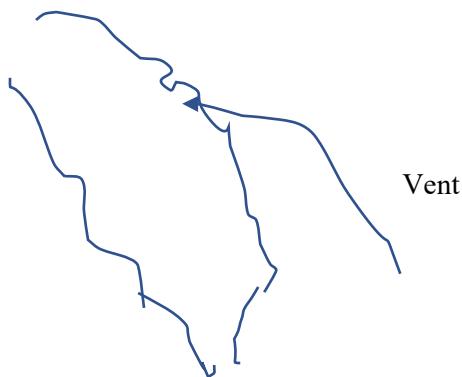


Fluctuations.

Impossible de prédire en amont.

La turbulences mélange, la turbulence disperse, elle diffuse (diffusion= transport d'une quantité d'un endroit de l'écoulement vers un autre endroit)

Jet turbulent



La turbulence dissipe = destruction d'une quantité (Energy cinétique → énergie thermique)

## Description statistique de la turbulence : probabilités, moyenne, moments.

Le plus simple est d'illustrer celle sur des champs 1D, ie issus par exemple. des mesures de fil chaud.

Soit une suite de N valeurs :

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_n];$$

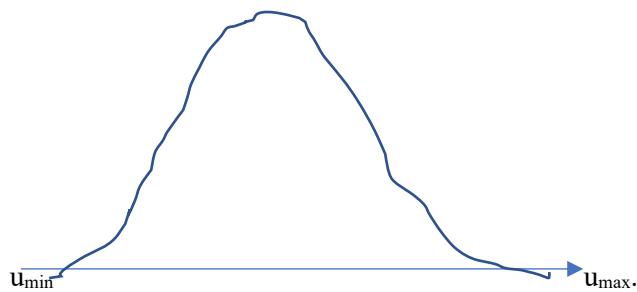
u : composante longitudinale de la vitesse.

$$\text{pas de temps entre deux mesures} = \Delta t = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_s} \quad (f_s=f \text{ sampling})$$

Parfois pour certaines méthodes de mesure tq l' ADL (=anémométrie doppler laser) le  $\Delta t$  est variable (parce que l'on peut ne pas trouver de particule à mesurer au bon moment).

N=grand=million de points

On fait l'histogramme des vitesses qu'on normalise



- ⇒ On normalise
- ⇒ PDF : probabilité density fonction.

il faut que  $\int_{-\infty}^{+\infty} P D f(x) dx = 1$ .

$$\bar{u} = \text{Moyenne} = \text{mean} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i.$$

ex :  $\bar{u} = 10 \text{ m/s}$

On soustrait  $\bar{u}$  à la vitesse instantanée  $u \Rightarrow$  la vitesse fluctuante (fluctuations).

$$u' = u - \bar{u}$$

$u'$  : vecteur ayant autant de composantes qu'on a de points de mesure.

$u'$  aura exactement la même allure que  $u$  car la différence est juste une translation  $\bar{u}$ . (on décale la courbe)

$$\bar{u}' = 0$$

Pour les fluctuations : → statistique plus fine : moment d'ordre 2, 3 et 4.

$$M_m = \overline{u'^m} \quad (\text{moyenne des } -(u') \text{ à la puissance } m))$$

$$M_2 = 1/N \sum_{i=1}^N (u'_i - \bar{u}')^2 = \overline{u'^2}$$

$M_2 > 0$  si  $M_2 = 0$  alors l'écoulement est laminaire.

$M_2$  = « énergie » du signal => variance du signal.

(matlab :  $u=[1250 \ 950 \ 210 \dots]$  ;  $\text{mean}(u)$ ,  $\text{var}(u)$   $\text{std}(u)$ )

$\sqrt{M_2}$  = écart type = RMS =  $\sqrt{\overline{u'^2}}$  = une seule valeur ex 1m/s.

$I = \frac{RMS(u)}{\bar{u}}$ . = intensité de la turbulence ex : 10%.

Si  $I < 3\%$  → écoulement faiblement turbulent (turbulence de grille).

25%, 30% → Jets, sillage.

$\approx 100\%$  → écoulement à point d'arrêt.

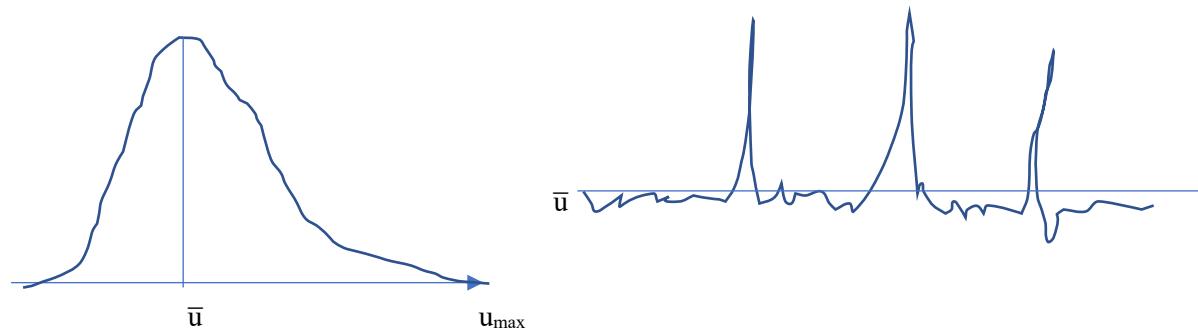
$\approx \infty$  → écoulement à point d'arrêt, en se plaçant très proche du bord.

$$M_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^3 = \overline{u'^3} < 0 \quad \text{ou} \quad > 0$$

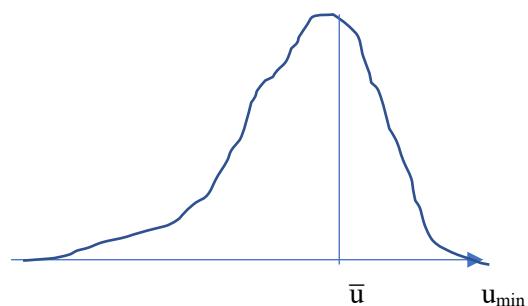
=> on construit une valeur adimensionnelle.

S=skewness ou coef de dissymétrie

$$S = M_3 / M_2^{3/2} = \quad > 0 \quad \text{ou} \quad = 0 \quad \text{ou} \quad < 0$$



Skewness  $> 0$  => il y a de rares et grandes valeurs de  $u'$ .



Skewness  $< 0$



Skewness=0

S=0 bon mélange, homogène

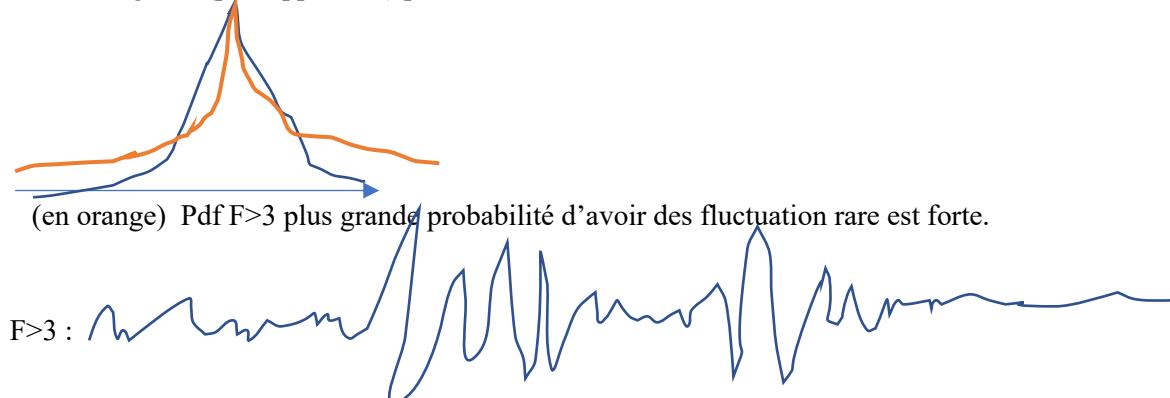
$$M_4 = 1/N \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^4 = \overline{u'^4}$$

Flatness= coef d'aplatissement =  $\frac{M_4}{M_2^2}$  adimensionnel.

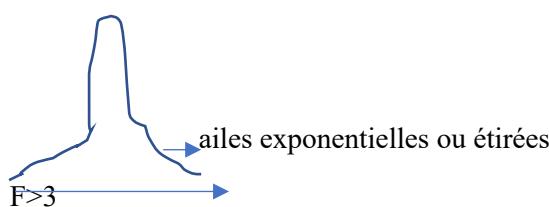
Flatness=3 → une PDF Gaussienne (si Skewness=0) ou quasi Gaussienne.

F>3=> écart à la Gaussianité ou à la « normalité » (synonyme)

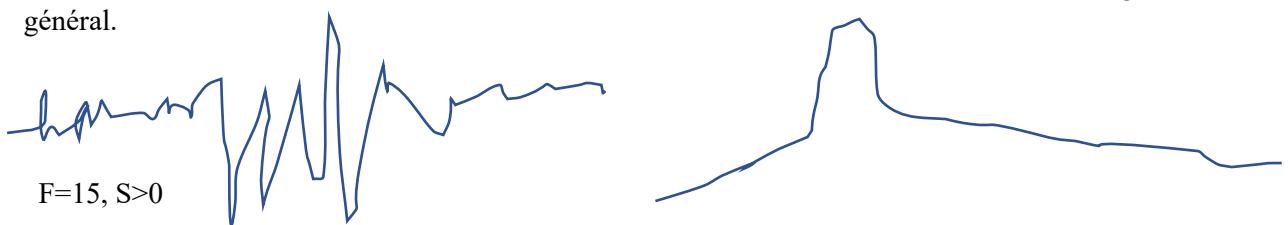
Plus F est grand (par rapport à 3) plus la PDF s'écarte à la forme d'une Gaussienne.



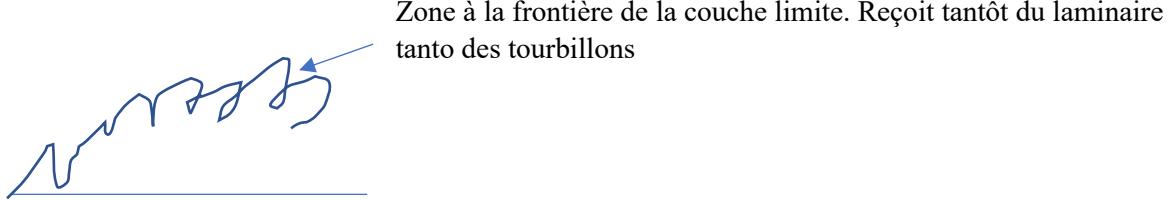
Intermittence interne= alternance entre des zones de signal turbulent d'activité modérée (petite variation) et d'autres zones d'activité turbulente très forte et très intense (gros pic).



Attention : flatness et skewness nous donnent des informations différentes sur la PDF et le signal en général.



Grosse aile (tails) et tendance à partir dans les négatifs. ?



### Corrélation en 2 points de l'écoulement turbulent :

$$1 \otimes \xrightarrow{\mathbf{r}} \otimes 2$$

$\mathbf{r}$ = vecteur séparation (incrément) ayant la signification d'une échelle.

On regarde tout ce qui se passe à  $\mathbf{r}$  qu'on a choisi.

$$R_{uu}(\mathbf{r}) = \overline{u'(\vec{x}) \cdot u'(\vec{x} + \vec{r})}$$

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \overline{u_i'(\vec{x}) \cdot u_j'(\vec{x} + \vec{r})} = \text{tenseur des corrélations de Reynolds.}$$

Dépendance de  $\mathbf{r}$  lorsque l'écoulement est homogène

Homogénéité = invariance des statistiques par rapport à une translation.

Les statistiques sont les mêmes partout.

Isotropie= invariance des statistiques par rapport à une rotation

les statistiques sont les mêmes dans toutes les directions.

(isotropie  $R_{ij}(r)$  avec  $r=|\mathbf{r}|$ )

Si Homogène et isotrope ;

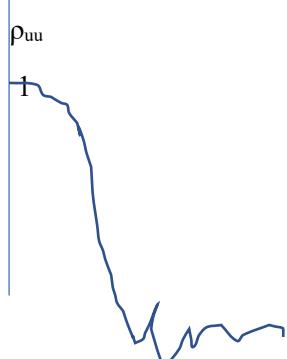
$$R_{UU}(\mathbf{r}) = \overline{u'(x) \cdot u'(x + r)}, \mathbf{r} \parallel \mathbf{x}$$

En adimensionnalisant :

$$\rho_{uu}(r) = \frac{R_{uu}(r)}{RMS(u(x)) RMS(u(x+r))}$$

si homogène et isotrope

$$= \frac{R_{uu}(r)}{\text{variance}(u)}$$





Autocorrélation spatiale.

Quand  $R$  tend vers 1 ça veut dire que les deux points sont balayés par les même tourbillon.

$\Rightarrow$  Deux échelles peuvent être construites à partir de cela :

$L$  = échelle intégrale = la macro-échelle de la turbulence.

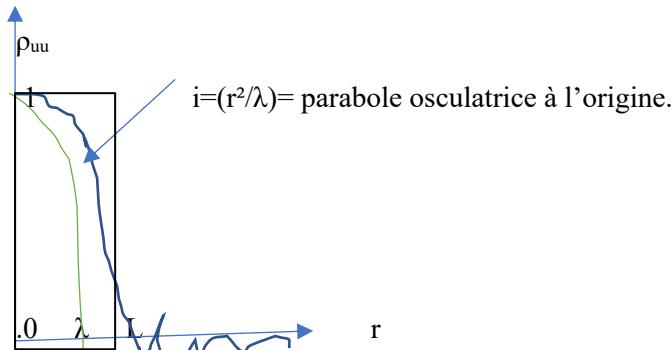
$$L^* = \int_0^\infty \rho_{uu}(r) dr$$

$L$  = taille caractéristique des plus gros tourbillons de l'écoulement.

$$\Rightarrow Re_L = \frac{L \cdot u_\infty}{\nu}$$

Dans la pratique, il est difficile de déterminer correctement l'échelle  $L$ ....

2<sup>nd</sup> échelle :  $\lambda$  = micro-échelle de Taylor.



$\lambda$  = intersection de la parabole osculatrice à l'origine avec l'axe des  $r$  ( $\rho_{uu}=0$ )

$$\lambda = \sqrt{\frac{\overline{u'^2}}{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2}}$$

$\partial u_1' / \partial x_1 \Rightarrow$  pour calculer  $\lambda$ , on dérive selon la direction qui définit la vitesse  $x$  pour  $u$  ( $y$  pour  $v$ ,  $w$  pour  $z$ ).

$\lambda$  = taille des tourbillons intermédiaires les plus fréquents, les plus **représentatifs** de l'écoulement.

(ni les plus gros, ni les plus petits).

$$Re_\lambda = \frac{\lambda \cdot RMS(u)}{\nu}$$

$\text{Re}\lambda \leq 100$  turbulence faible

200

300 turbulence correcte.

....

500 écoulement forcée → turbulence développée.

...

$10^3$  (+ élevé en labo)

$10^5$  couche limite atmosphérique.

---

$$\text{RQ : } \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \overline{a' b'}$$

Turbulence stationnaire = la moyenne reste la même dans le temps.

$\partial/\partial t \bar{a} \Rightarrow$  moyenne temporelle sur de grands temps, d'une moyenne temporelle faite sur un temps plus petit.

Revoir le cours de turbulence année dernière ; équation de la chaleur.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nu \nabla^2 T = a \Delta T$$

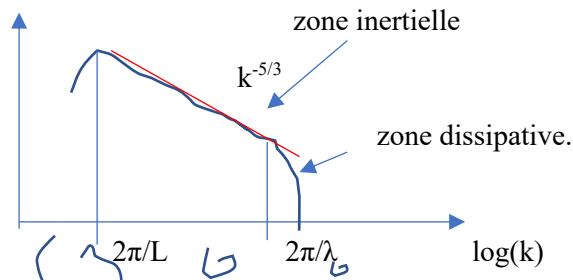
$$a = \frac{k}{\rho c} : \text{diffusivité thermique}$$

---

### **Spectres : On les construit à partir des corrélations.**

$$R_{uu}(r) = \overline{u'(x) \cdot u'(x+r)} \rightarrow \text{TF} \rightarrow |k|^2 \rightarrow \text{énergie.}$$

$$\log(E_{uu}(k)) \quad k = 2\pi/r \text{ nombre d'onde}$$



Bcp d'énergie aux bas nombres d'onde et moins aux grands nombres d'onde

$$E_{UU}(k_1) \cdot dk_1 = \text{énergie des tourbillons de taille } 2\pi/k_1.$$

En faisant l'intégrale sur tout le spectre on a l'énergie global de la turbulence.

$$\int_0^\infty E_{uu}(k) dk = \overline{u'^2} = M_2$$

=>. dissipation de l'énergie (=départ) du système et transformation en chaleur. On va démontrer que, avec la théorie de Kolmogorov,  $E(k) \approx k^{-5/3}$  sur une certaine étendue de nombres d'onde, et lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand.

## 2. Equations de transport des écoulements turbulents

Equation de transport :

Quantité de mouvement : Equations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \operatorname{div} v = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} v = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P + f_v \quad (\text{+ Laplacian !})$$

Advection-diffusion de la température.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}$$

(Notation d'Einstein double indice j signifie somme sur j ;  $\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0$ )

Incompressibilité  $\nabla \cdot v = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(v_j T)}{\partial x_j} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} = a \Delta T = a \nabla^2 T$$

a= diffusivité thermique  $m^2.s^{-1}$  comme  $v = \frac{\mu}{\rho}$

a=  $\frac{k}{\rho c}$  avec k (ou  $\lambda$ ) la conductivité thermique, et c la chaleur spécifique.

a= surface latérale chauffée par unité de temps. (la surface que je chauffe par unité de temps)

En milieu turbulent toutes les quantités fluctuent

$T = \bar{T} + T'$  et  $v_j = \bar{v}_j + v'_j$  avec  $\bar{T}$  la moyenne et  $T'$  la fluctuation.

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{T} + T')} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_i}[(\bar{v}_j + v'_j) \cdot (\bar{T} + T')]} = \overline{a \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\bar{T} + T')}$$

On prend les valeurs moyennes (de Reynolds) de cette équation, et on applique les règles de Reynolds :

$$\overline{.(f + g)} = \bar{f} + \bar{g}$$

$$.\overline{(\alpha.f)} = \alpha.\bar{f}$$

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{f}$$

$$\bar{f}' = 0$$

$$\boxed{(f.g) \neq \bar{f}.\bar{g}}$$

$\Rightarrow$  Problème de fermeture de la T.

En appliquant les règles de Reynolds pour « éclater » les moyennes on trouve :

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} (\bar{T} + T')} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_i} [(\bar{v}_j + v'_j).(\bar{T} + T')]} = \overline{a \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{T} + T')}$$

Puis comme  $\overline{(\bar{T} + T')} = (\bar{\bar{T}} + \bar{T}')$  et  $\bar{T}'$  est nul. Donc :

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} (\bar{T})} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j + v'_j) . (\bar{T} + T')} = a \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{T})$$

On veut s'occuper du produit.

$$\overline{[(\bar{v}_j + v'_j).(\bar{T} + T')]} = \overline{\bar{v}_j} \cdot \bar{\bar{T}} + \overline{\bar{v}_j} \cdot \bar{T}' + \overline{v'_j} \cdot \bar{T} + \overline{v'_j} \cdot \bar{T}'$$

$$= \overline{\bar{v}_j} \cdot \bar{\bar{T}} + \overline{\bar{v}_j} \cdot \bar{T}' + \overline{v'_j} \cdot \bar{T} + \overline{v'_j} \cdot \bar{T}'$$

les moyenne des perturbation sont nul et  $v_j^-$  est constante donc

$$= \overline{\bar{v}_j} \cdot \bar{\bar{T}} + \overline{v'_j} \cdot \bar{T}'$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\bar{T}) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{\bar{v}_j} \cdot \bar{\bar{T}}] + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_j} \cdot \bar{T}') = a \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \bar{T}$$

Equation de transport de la valeur moyenne de la Température.  $\rightarrow$  Mais qui dépend, en plus des valeurs moyennes, des statistiques des fluctuations :  $\overline{v'_j} \cdot \bar{T}'$ .  $\Rightarrow$  pour fermer notre équation on a besoin d'exprimer/modéliser  $\overline{v'_j} \cdot \bar{T}'$  en fonction de  $\bar{T}$ . (ça se mord la queue)

## Energie cinétique de la turbulence

$$K=1/2 [\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}]$$

Energie cinétique à toutes les échelles.

Comme la turbulence est caractérisée par toute une gamme d'échelles => regarder la distribution de l'énergie à chaque échelle, ou à chaque nombre d'onde  $k=2\pi/r$

$\Rightarrow$  spectre , distribution spectrale de l'énergie.

Energie à un nombre d'onde  $K=1/2 \int_0^\infty E(k) dk$

Regardons à présent comment l'énergie entre dans le système comment elle est créée, et aussi comment elle quitte le système (comment elle est dissipée)

=>. Equation de transport pour K.

A partir de Navier Stokes :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \quad (1)$$

On applique la moyenne de Reynolds :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i. \quad (2)$$

On soustrait (1) à (2) => équation de transport pour les fluctuations  $u'_i$  car  $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ .

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \left[ u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \Delta u'_i \quad (3)$$

Attention au développement (faisable)....

On multiplie (3) par  $u'_i$  et on prend la moyenne de Reynolds = le premier terme est :

$$\overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \overline{u'^2} \right] = \frac{\partial}{\partial t} K$$

On traite de la même façon les autres termes

=>.

$$\boxed{\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = P + Diff - \bar{\epsilon}} \quad (4)$$

$\frac{DK}{Dt}$  = production+diffusion + dissipation

$$\frac{DK}{Dt} = P + diff - \bar{\epsilon}$$

$P = -2 \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  = Proportionnelle aux gradients de vitesse **moyenne** et aux tensions turbulentes.

(Composantes du tenseur de Reynolds)

Nous avons déjà vu que  $\overline{u'v'} < 0$  (**à développer !!**)

Pour le cas d'une couche limite, par exemple :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} > 0, \quad \overline{u'v'} < 0$$

$$P = -2 \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} > 0$$

Le rôle de la production est d'augmenter l'énergie cinétique du système, de la produire.

(On a en fait le fluide qui s'enroule car le bas colle à la paroi.)

« cascade » tous les tourbillons se cassent pour créer d'autres plus petits et ainsi de suite...

Image de « cascade » de Richardson 1922

La production assure la création des plus gros tourbillons les instabilités vont assurer le reste...

Diffusion → par la pression et → par les fluctuations turbulentes

$$\text{Diffusion} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'p'} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_i u'_j}$$

Diffusion : prend l'énergie dans les endroits riches et les amène autres endroits pauvres  
mais  $\int_V \text{Diffusion} dV = 0 \Rightarrow$  loi conservatrice.

C'est un transport à l'intérieur du système, d'un endroit à l'autre.

Donc si on intègre  $\frac{DK}{Dt}$  sur tout le volume

$$DK/Dt = \text{Production} - \bar{\epsilon}$$

$\bar{\epsilon}$  = dissipation = taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence.

$$\bar{\epsilon} = \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (5).$$

$$\bar{\epsilon} > 0$$

$$[\bar{\epsilon}] = \text{m}^2/\text{s}^3.$$

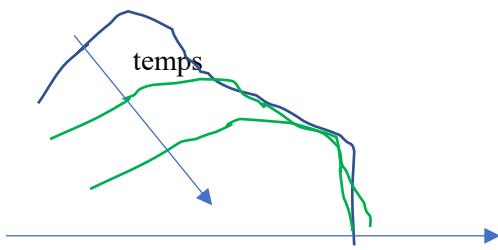
$$\frac{dK}{dt} = P - \bar{\epsilon}.$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{dK}{dt} > 0 \Rightarrow K \text{ augmente au cours du temps.}$$

$$\bar{\epsilon} > 0 \Rightarrow -\bar{\epsilon} < 0$$

Si on arrête de produire de l'énergie cinétique  $P=0 \Rightarrow$  système en décroissance libre

$\frac{dK}{dt} = -\bar{\epsilon} < 0 \Rightarrow K$  descend au cours du temps jusqu'à la dissipation complète des fluctuations  $\Rightarrow$  laminarisation



Si  $P = 0$ , Au fur et à mesure du temps on perd l'énergie des gros tourbillons qui partent se dissiper.

Si j'arrête de donner de l'énergie, les grands tourbillons s'éclatent en plus petits tourbillons jusqu'à ce qu'il ne reste que des petits tourbillons qui se dissipent par eux mêmes.

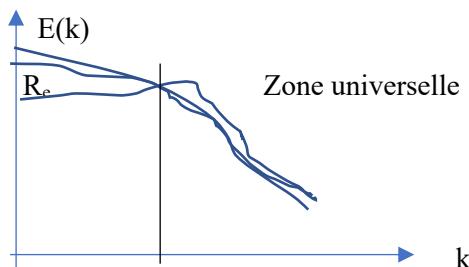
### **3. Modélisation phénoménologique de la turbulence**

#### **Théorie de Kolmogorov 1941 :**

Hypothèse : Nombre de Reynolds très très grand (cela pose le problème de l'applicabilité de cette théorie)

+> 2 hypothèses de similitude.

**H<sub>1</sub>**: Si  $Re \rightarrow \infty$ , il existe une gamme d'échelles petites par rapport à l'échelle intégrale  $L$ , où : les conditions initiales spécifiques à l'écoulement sont oubliées et donc l'écoulement devient localement (donc à petite échelle) isotrope et ses statistiques à ces échelles sont universelles.



On peut construire une échelle caractéristique des plus petits tourbillons de l'écoulement :

L'échelle de Kolmogorov

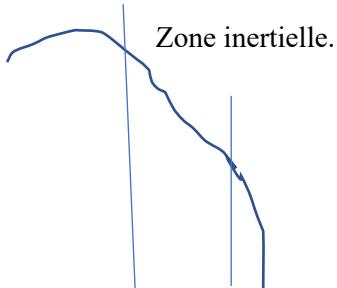
$$v = \langle m^2/s \rangle$$

$$\bar{\epsilon} = \langle m^2/s^3 \rangle$$

$$\eta = [v^3/\bar{\epsilon}]^{1/4}$$

**2<sup>nd</sup> hypothèse de similitude** : Toujours pour des Reynolds suffisamment grands, il existe une gamme d'échelles située à l'intérieur de la zone d'échelles universelles, où les statistiques ne sont pas encore

affectées par la viscosité (propriété des petites échelles) ; et dépendent donc uniquement de  $\bar{\epsilon}$  = taux de dissipation d'énergie cinétique à travers les échelles.



Dans la zone inertielle :  $E(k) \propto C \cdot \bar{\epsilon}^a k^b$       **A SAVOIR**

$C$  = constante sans dimension.

Trouver  $a$  et  $b$  sur des base dimensionnelles.

$$\langle E \rangle = m^3/s^2 \quad \int_0^\infty E(k) dk = \text{énergie cinétique.}$$

$$\langle k \rangle = 1/m$$

$$\langle \bar{\epsilon} \rangle = m^2/s^3.$$

$$m^3/s^2 = (m^2/s^3)^a \cdot (1/m)^b \Rightarrow$$

$$3=2a-b$$

$$2=3a$$

$$\Leftrightarrow a=2/3,$$

$$b=-5/3$$

RQ : Devient vrai si le Re est assez grand. Bon indicateur de la turbulence.

\*\*\*\*\* fin du cours 2\*\*\*\*\*

note TP :

Mandoline : fil chauffant placé devant une grille.

$$\bar{\epsilon} = \frac{\nu}{2} \overline{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2}$$

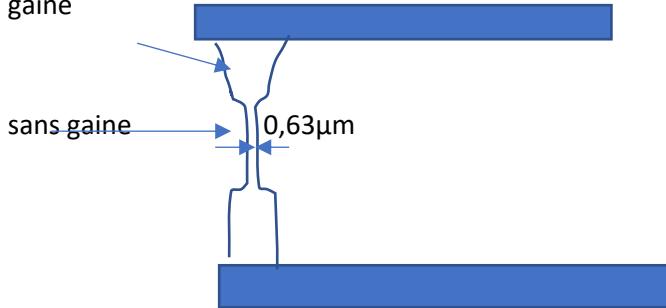
$$\Delta t = \frac{1}{f_s}$$

$f_s$  = fréquence de sampling.

vitesse : obtenue par anémométrie à fil chaud ( $d=2,5\mu\text{m}$ )

température : obtenue par anémométrie à fil froid (comme le fil chaud mais froid) ( $d=0,63\mu\text{m}$ )

gaine



On a un écoulement de grille

$U_{infty}=6.6\text{m/s}$

$M=2,5\text{cm}$  (coté d'une maille du grillage)

$fred=6\text{kHz}$

---

sur le spectre

$k^2 E(k)$  donne une courbe dont l'intégrale donne  $\bar{\epsilon}$ .

LES on ne voit pas les petits tourbillons ;

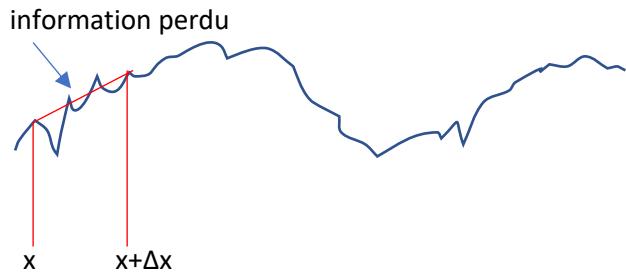
En LES si on trace  $k^2 E(k)$  on a qu'une partie de la courbe et on sous évalue  $\bar{\epsilon}$ .

---

Anémométrie à fils chaud/froid.

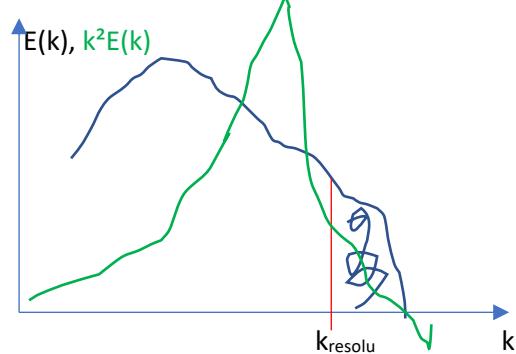
Méthode très ancienne (+que les méthodes laser), mais toujours utilisée à cause de sa très bonne résolution temporelle. Elle nous permet ainsi d'avoir accès aux gradients temporels du signal et, via l'hypothèse de Taylor (pas toujours applicable), aux gradients spatiaux=> donne accès à des

grandeur telle que  $\bar{\epsilon}$  (difficile à avoir, impossible en PIV par ex). Par exemple si l'écoulement est localement isotrope :  $\bar{\epsilon}_{\text{iso}} = 15v \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ .



Ici les deux mesures sont trop éloignées donc les variations intermédiaires ne sont pas résolues. Le gradient qui serait calculer serait sous-estimé.

En passant par les spectres on verrait.



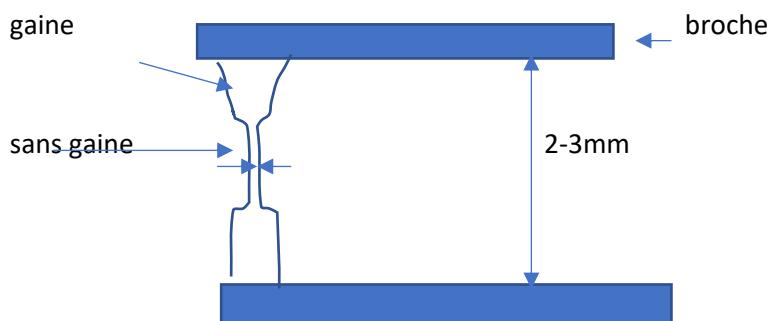
Ici la courbe  $k^2E(k)$  est amputé d'une partie de sa surface or  $\bar{\epsilon} \approx \int_0^\infty k^2E(k)dk$  donc si l'aire sous la courbe est amputée alors  $\bar{\epsilon}$  est sous-estimé.

$$\text{RQ : } \frac{dK}{dt} = P - \bar{\epsilon}.$$

Dissipation normalisée :  $C_\epsilon = \frac{\bar{\epsilon}L}{RMS(u)^3}$ , avec L l'échelle intégrale ou une échelle caractéristique

RQ : du bruit peut apparaître sur le spectre à cause de la mesure. Ce bruit se traduit par des oscillations sur  $k^2E(k)$  ce qui pose problème.

Température : obtenue par anémométrie à fil froid (comme le fil chaud mais froid) ( $d=0,63\mu\text{m}$ )



$d_{fil}=2,5\mu m$  ou  $5\mu m$  pour le fil chaud

$d_{fil}=0.63\mu m$  pour le fil froid.

On enlève la gaine par électrolyse dans l'acide nitrique.

Dans ce circuit électrique on a deux possibilités :

- 1- On fait passer un courant constant,  $I=cst$  (mA) => CCA= Constant Current Anemometry= « fil froid ». Si l'écoulement amont possède des fluctuations de temps alors il y aurait des fluctuations de la résistance électrique du fil. La résistance variant selon  $R = R_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T)$  avec une constante caractéristique du fil ( $K^{-1}$ ) et  $\Delta T$  la différence de température avec une température de référence.

Du fait de la loi d'Ohm cette variation de résistance induira une différence de tension aux bornes du fil.  $E = RI = I \cdot R_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T)$  or ici seul  $\Delta T$  n'est pas une constante et trahi les fluctuations de température.

RQ : Si l'on souhaite avoir les tourbillons les plus petits alors il faut avoir des fils très fins. La difficulté de résolution provient donc de la finesse des fils utiliser.

RQ : il faut que l'écoulement ne soit pas réactif à cause de la fragilité du système.

- 2- CTA = Constante Temperature Anemometry = Anémométrie à fil chaud. On va imposer, via un pont de Wheatstone, à ce que  $R$ , la résistance du fil, reste constante au cours du temps. L'écoulement en amont est considéré isotherme => toute fluctuation de vitesse en amont, conduit à un refroidissement local du fil, donc à une variation de sa résistance.  $P_{fil} = puissance él = RI^2 = \frac{E^2}{R}$ , avec  $R = cst \Rightarrow P_{fil} \approx E^2$ .

D'un autre côté, la puissance de refroidissement thermique s'écrit  $h \cdot S_{fil} (T_{fin} - T_\infty)$  avec  $S_{fil}$  la surface du fil,  $h$  coef de Newton.

Dans les cours de Thermique,  $P = flux \text{ refroidissement} = h \cdot S_{échange} \cdot (T_{fil} - T_\infty) \frac{E^2}{R} = h \cdot S_{fil} (T_{fil} - T_\infty)$  avec  $S=cst$ ,  $R=cst$ ,  $(T_{fil} - T_\infty)$  est constant car en imposant  $R=cst$   $T_{fil}=cst$  et  $T_\infty$  est considéré comme cst. Il ne reste que  $E^2$  qui fluctue en fonction de  $h$  et  $h$  s'obtient à partir de  $Nu = \frac{h \cdot d_{fil}}{k}$  avec  $k$  la conductivité de l'air.  $Nu = f(Re, Pr) \approx a Re^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} + b \Rightarrow u^{\frac{1}{2}}$  donc  $\frac{E^2}{R} = cst u^{\frac{1}{2}} + cst2$  (Loi de King). On enregistre un signal de  $E^2$  et on va le convertir en  $u$ . Il faut connaître les deux cst qui lie  $E^2$  et  $u$ , il y a donc besoin d'un procédé de calibration.

Turbulence dans la manche.

Raz de Blanchard.

$$1) \quad V_0 = 10 \text{ noeuds}, 1 \text{ noeud} = 1854 \text{ m/h}$$

profondeur au point de mesure 50m

calcule le nombre de Reynolds (global) associé aux plus grands tourbillons observables.

$$\nu_e = 1.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu}$$

$$Re = 2,57 \cdot 10^8.$$

Largement turbulent

$$2) \quad .$$

On sait  $v^*/V_0 = 0.2$

$$v^* = 1.03 \text{ m/s}$$

$E_{\text{total}} = E_{\text{cinétique}}$  total par unité de masse.

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} v^{*2} = 0,53 \text{ J/kg.}$$

$$3) \quad .$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E(k) dk$$

$$4) \quad .$$

$$\eta = m$$

$$\nu = \text{m}^2/\text{s}$$

$$\epsilon = J/(kg \cdot s) = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} / (kg \cdot s) = m^2 \cdot s^{-3}.$$

$$\eta = (v^3 / \epsilon)^{1/4}.$$

$$\eta = 0.1 \text{ mm}$$

5) . Il est produit  $\epsilon = 3.10^{-3} \text{ W/kg}$  d'eau et il faut 4187J pour augmenter de 1°C, 1kg d'eau. Donc il faudrait environ 16 jours pour gagner 1°C. (ou 5 jours pour  $\epsilon = 9.10^{-3} \text{ W/kg}$ ) Donc ce n'est pas la turbulence qui change la température de l'eau.

6) Turbulence en déclin : les perturbations ne sont pas alimentées et donc disparaissent après s'être dissipées.  $dk/dt = P - \epsilon$  avec  $P=0$ .  $\Rightarrow \Delta E/\text{temps} = -\epsilon$  avec  $\Delta E = E_f - E_i$  mais  $E_f=0$  donc  $t = E_i/\epsilon$ . Il y a,

globalement  $0,53 \text{J/kg}$  d'énergie due à la turbulence. Cette énergie est dissipée à un rythme  $\bar{\epsilon}$  de  $3 \cdot 10^{-3} \text{W/kg}$  ainsi il faudrait

---

**Exo : Le but est de déterminer les ordres de grandeur des temps qui caractérisent le mélange dans des réacteurs chimique. On se contentera de l'analyse de l'ordre de grandeur, qui est suffisante pour le prédimensionnement du dispositif.**

- 1) Etude du mélange dans une tasse de café : Notre ingénieur chimiste prend son café dans un bol hémisphérique de rayon  $R=10\text{cm}$ . Il constate que en remuant son café avec une cuillère de taille caractéristique  $L=2\text{cm}$ , le sucre est complètement mélangé et dissous au bout d'un temps  $T=20\text{s}$ . Il estime la vitesse de la cuillère  $u$  à  $10\text{cm/s}$ .

- a) Re avec  $L$  la taille de la cuillère,  $v_{\text{café}} = v_{\text{eau à } 60^\circ\text{C}} = 5 \cdot 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$

$$Re = 4000$$

$$Re = v^* L / v$$

Turbulent

- b) On suppose que le temps de mélange  $T$  ne dépend que de la puissance injectée dans l'écoulement ( $P$ ), la taille des gros tourbillons. On suppose que  $P$  est intégralement transmise aux petits tourbillons via la cascade de Kolmogorov.

Analyse dimensionnelle, relier  $T$  à ces grandeurs, c'est-à-dire  $\bar{\epsilon}$  (pour le  $P$ ) et  $L$  pour la taille des plus gros tourbillons. En déduire la valeur de  $\bar{\epsilon}$  ( $L$  sera considéré comme longueur de mélange et l'échelle intégrale de l'écoulement).

$$\bar{\epsilon} = J / (\text{kg.s}) = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$$

$$T = s$$

$$L = m$$

$$\bar{\epsilon} \approx L^2 \cdot T^{-3}.$$

$$T = \left( \frac{L^2}{\bar{\epsilon}} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$\bar{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-8} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}.$$

$$\text{ou comme } \frac{dK}{dt} = P - \bar{\epsilon} \Rightarrow P \approx \langle u'v' \rangle \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \approx \frac{u'^3}{L} \approx \epsilon \text{ avec } u' = \text{RMS}(u)$$

$$C_\epsilon = \frac{\epsilon L}{u'^3} \approx 1. \text{ (quand la turbulence est bien installée).}$$

- c) Déduire de tout cela la valeur de  $K$ = énergie cinétique de la turbulence ainsi que celle de  $I = \frac{\sqrt{K}}{u}$   
 Quelle est la taille de  $\eta = ?$

Quelle est la vitesse à laquelle ces tourbillons tournent.

$$\eta = \left[ \frac{v^3}{\epsilon} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\eta = 1,26 \text{ mm}$$

$$t_k = \left( \frac{v}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$v_k = \frac{\eta}{t_k} = v^{\frac{1}{4}} \epsilon^{\frac{1}{4}}.$$

$$v_k = 3,98 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$P = \epsilon = \frac{u'^3}{L} = \frac{RMS(u)^3}{L}$$

$$\Rightarrow RMS(u) = (\epsilon L)^{1/3}, \Rightarrow K = \frac{1}{2} \overline{u'_l^2} = \frac{3}{2} \overline{u'^2} = \frac{3}{2} rms(u)^2 \text{ le } 3/2 \text{ vient du fait qu'on a 3 direction.}$$

$$K = (\epsilon L)^{2/3}$$

$$K = 1,5 \mu J$$

$$I = \frac{\sqrt{k}}{u}$$

$$I = 1,2 \cdot 10^{-2}$$

2<sup>e</sup> partie : Etude du mélange dans un réacteur chimique.

Ce réacteur est hémisphérique de rayon  $R=2\text{m}$ , et les réactifs sont mélangés par un agitateur de taille  $L=0,4\text{m}$ . La vitesse moyenne  $u$  de l'agitateur est  $1\text{m/s}$  les réactifs sont des solutions aqueuses à  $20^\circ\text{C}$ , leur viscosité est celle de l'eau.

- a) Calculer les Re

$$Re = Lu/v$$

$$Re = 400\,000$$

- b) Avant de réaliser une maquette sérieuse pour étudier le temps nécessaire au mélange, le chimiste souhaite l'évaluer simplement. On considère que les propriétés de l'écoulement sont indépendantes du nombre de Reynolds. En considérant le rapport entre les échelles de longueur et temps déduire le rapport d'échelle sur les temps T. Monter que  $T_{réacteur} \approx 40\text{s}$ .

ici  $L/u = 0,4\text{s}$  alors que dans le premier cas  $L/U=0,2\text{s}$  donc on a un temps caractéristique 2 fois plus grand donc le  $T$  va ici être deux fois plus grand.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{L_2}{u_2}}{\frac{L_1}{u_1}} = 2$$

c) Appliquer le même raisonnement pour déduire  $\bar{\epsilon}$ , K et I =  $\sqrt{K}/u$ . Déduire  $\eta$ , ensuite  $Re_\lambda$ .

$$\bar{\epsilon} \approx L^2 \cdot T^{-3}$$

$$\eta = \left[ \frac{v^3}{\bar{\epsilon}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$v_k = \eta/t_k = v^{\frac{1}{4}} \epsilon^{\frac{1}{4}}$$

$$K = (\epsilon L)^{\frac{2}{3}}$$

$$I = \frac{\sqrt{k}}{u}$$

$$\epsilon = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}^3$$

$$\eta = 7.95 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$v_k = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$k = 1 \cdot 10^{-4}$$

$$I = 1\%$$

$$Re_\lambda = \frac{RMS(u) * \lambda}{v}$$

$$\lambda = \sqrt{\left( \frac{RMS(u)^2}{\frac{\epsilon}{15v}} \right)}$$


---

\*\*\*\*\* cours 3 \*\*\*\*\*

COURS

#### 4. Modèle A équations supplémentaires

##### 4.1. Modèle K-L à une équation supplémentaire

PRANDTL et KOLMOGOROV ont proposé d'améliorer le modèle lors des **fortes turbulences** influençant sur l'énergie cinétique turbulent k.

Il existait un paradoxe :

$$\overline{v'_i v'_j} = -\nu_t \left[ \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right]$$

$\overline{v'_i v'_i} = 2K = 0$  continuité Il y a un problème car K ne peut pas être nul. RQ : SOMME de  $\overline{v'_i v'_i}$

$$\Rightarrow \overline{v'_i v'_j} = \underbrace{\frac{2}{3} K \delta_{ij}} - \nu_t \left[ \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right]$$

RQ :  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$

$\Rightarrow$  on doit déterminer  $K, \nu_t$ .

$\{ v_t = c_2 \cdot l \cdot (\sqrt{K})$  avec  $l$  la longueur de mélange,  $\sqrt{K}$  = vitesse caractéristique,  $C_2$  = constantes ajustées sur chaque écoulement.

$\{ \frac{dK}{dt} = P - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_j(K))$  équation en un point,  $+ \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_j(K))$  dissipation liée à la diffusion turbulente (disparaît quand on intègre sur le volume)

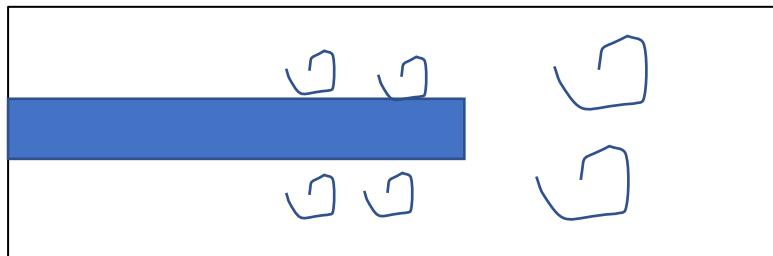
$$P = -\overline{v'_i v'_j} \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{2}{3} K \delta_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \nu_t \left[ \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = \frac{\nu_t}{2} \left[ \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right]^2$$

RQ : pas de modèle de turbulence parfait pour toute les situations.

#### 4.2. Modèle K- $\epsilon$ à deux équations supplémentaires.

(Modèle LRR : Lauder, Reece, Rodi)

Ce modèle est plus précis car il s'affranchit des conditions géométriques de détermination de  $l$ .



Deux tourbillons dans cette exemple ;

les grands loin des parois  $l = cst * y$

Les petits très proches des parois :  $l = cst * y [1 - e^{-y/l}]$

L'équation sur  $l$  est difficile ;  $\rightarrow \bar{\epsilon}$  est plus abordable.

$(\epsilon = m^2/s^3)$

$\bar{\epsilon} = cst * K^{3/2}/l \Rightarrow l = cst * K^{3/2}/\bar{\epsilon}$  Connaitre.

$v_t = C_2 \cdot cst \cdot K^{3/2}/\bar{\epsilon} \cdot k^{1/2}$ .

$\Rightarrow$ .

$\{ v_t = C_v \cdot K^2/\bar{\epsilon}$  avec  $C_v = C_2 * cst$

$$\{ \overline{v'_i v'_j} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - \nu_t \left[ \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right]$$

$$P = \frac{\nu_t}{2} \left[ \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial x_i} \right]^2$$

Voir le poly

Valeur de  $C_2, C_3, \sigma_k \Rightarrow$  valeur empirique.

Modèle  $k-\epsilon$  : 6 inconnue, vitesse  $(u, v, w)$  + Pression +  $K + \epsilon$ .